Moment Pędu.

Zasada dynamiki , wyrażona w formie Równania Newtona , implikuje pojęcia pędu , impulsu siły, energii kinetycznej , pracy. Pojęcia te opisują ruch i jednocześnie spełniają równania , które wynikają z równania Newtona. W konsekwencji wiedza o ruchu punktu materialnego jest zawarta w zasadach dynamiki. Chociaż powyższe pojęcia można traktować zawężając je do techniki całkowania równań dynamiki , to szerzej budują one język mechaniki klasycznej. W tym sensie obecne są w tym języku np. funkcjonał pracy , funkcjonał impulsu siły. Na drodze tego typu rozumowania otrzymuje się moment pędu i moment siły a także odpowiedni funkcjonał impulsu momentu siły. Przedstawimy te pojęcia jako wynikające z zasady dynamiki.

Moment pędu. Impuls momentu siły.

Równanie Newtona mnożymy obustronnie przez wektor wodzący :

$$m\vec{r}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)=\vec{r}(t)\times\vec{F}(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)$$

ponieważ $\vec{r}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)=\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\times\dot{\vec{r}}(t))$ otrzymujemy :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\times\vec{p}(t))=\vec{r}(t)\times\vec{F}(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)$$

Lewa strona równania zawiera pochodną po czasie wektora zwanego momentem pędu $\vec{L}\equiv\vec{r}\times\vec{p}$. Prawa strona to wektor momentu siły $\vec{M}\equiv\vec{r}\times\vec{F}$. Powyższe równanie wyraża szybkość zmiany wektora momentu pędu w czasie jako wektor momentu siły :

$$\dot{\vec{L}}=\vec{M}$$

Całkując obustronnie po czasie otrzymujemy :

$$\vec{L}(t)-\vec{L}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\vec{M}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\,dt \quad , \quad \vec{L}(t)-\vec{L}(t_0)=\int_{t_0}^{t}(\vec{r}(t)\times\vec{F})\,dt$$

$$\Delta_{[t_0,t]}\vec{L}\equiv\vec{L}(t)-\vec{L}(t_0) \quad , \quad \Delta_{[t_0,t]}\vec{L}=\int_{t_0}^{t}(\vec{r}(t)\times\vec{F})\,dt$$

Powyższe stwierdzenia wiążą zmianę momentu pędu w czasie z funkcjonałem impulsu momentu siły $\int_{t_0}^{t}(\vec{r}(t)\times\vec{F})\,dt$.

W ogólności jest :

$$\vec{L}(t)=m\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)=m\vec{r}(t)\times(\pi_{\vec{r}(t)}\vec{v}(t)+P_{\vec{r}(t)}\vec{v}(t))=m\vec{r}(t)\times(\pi_{\vec{r}(t)}\vec{v}(t))$$

Właściwość ta mówi, że dla danego obserwatora umieszczonego w początku układu współrzędnych niezerowy wkład do wektora momentu ma tylko składowa transwersalna prędkości $\pi_{\vec{r}(t)}\vec{v}(t)$ t.j. składowa prędkości prostopadła do wektora wodzącego $\vec{r}(t)\circ\pi_{\vec{r}(t)}\vec{v}(t)=0$.

Mamy także :

$$\vec{L}(t)=m\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)=m(\pi_{\vec{v}(t)}\vec{r}(t)+P_{\vec{v}(t)}\vec{r}(t))\times\vec{v}(t)=m(\pi_{\vec{v}(t)}\vec{r}(t))\times\vec{v}(t)$$

Właściwość ta mówi, że wszyscy obserwatorzy, dla których składowa wektora wodzącego $\pi_{\vec{v}(t)}\vec{r}(t)$ jest ta sama , obserwują ten sam moment pędu $\vec{L}(t)$. Zauważmy, że obserwatorzy o tej własności znajdują się na linii prostej. Niech $\vec{r}_o$ oznacza a priori dowolną translację . Jeśli $\pi_{\vec{v}(t)}(\vec{r}(t)+\vec{r}_o)=\pi_{\vec{v}(t)}\vec{r}(t)$ to $\pi_{\vec{v}(t)}\vec{r}_o=\vec{0}$ czyli $P_{\vec{v}(t)}\vec{r}_o=\vec{r}_o$. Wszystkie wektory $\vec{r}_o$ o tej właściwości tworzą w danej chwili czasu prostą.

O ile przy dowolnej translacji o stały wektor $\vec{r}_o=\vec{const}$, $\vec{r}_1(t)=\vec{r}(t)+\vec{r}_o$ wektor prędkości nie zmienia się $\vec{v}_1(t)=\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)+\vec{r}_o)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\vec{v}(t)$ i tym bardziej wektor przyspieszenia

$\vec{a}_1(t)=\vec{a}(t)$, o tyle wektor momentu pędu zmienia się pod wpływem tej translacji następująco :

$$\vec{L}_1(t)=m(\vec{r}(t)+\vec{r}_o)\times\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)+\vec{r}_o)=m\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)+m\vec{r}_o\times\vec{v}(t)=\vec{L}(t)+m\vec{r}_o\times\vec{v}(t)$$

Jak widać oba momenty pędu różnią się o składnik zależny od translacji $m\vec{r}_o\times\vec{v}(t)$.
Odpowiednie momenty sił będą się różnić o składnik $m\vec{r}_o\times\vec{a}(t)$.

Jeśli dokonamy translacji dowolnego kartezjańskiego układu współrzędnych tak aby jego początek znalazł się punkcie poczatkowym trajektorii punktu materialnego $\vec{r}(t_0)$ to otrzymamy trajektorię $\vec{r}_+(t)\equiv\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$. Moment pędu w dowolnym układzie współrzędnych możemy przedstawić w postaci :

$$\vec{L}(t)=m\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)=m(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))\times\vec{v}(t)+m\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)$$

czyli :

$$\vec{L}(t)=m(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))\times\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))+m\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)=m\vec{r}_+(t)\times\dot{\vec{r}}_+(t)+m\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)$$

i w rezultacie :

$$\vec{L}(t)=\vec{L}_+(t)+\vec{L}_-(t)$$

gdzie składniki momentu pędu :

$$\vec{L}_+(t)\equiv m\vec{r}_+(t)\times\vec{v}_+(t) \quad , \quad \vec{L}_-(t)\equiv m\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)$$

Oba składniki momentu pędu leżą w płaszczyznie prostopałej do kierunku ruchu tzn.

$$\pi_{\vec{v}(t)}\vec{L}_+(t)=\vec{L}_+(t) \quad , \quad \pi_{\vec{v}(t)}\vec{L}_-(t)=\vec{L}_-(t)$$

Łatwo to sprawdzić wziąwszy pod uwagę fakt, że $\vec{v}_+=\vec{v}(t)$.
Obliczamy zatem :

$$\vec{L}_-(t)\times\vec{L}_+(t)=(\vec{r}(t_0)\circ\vec{L}(t))\vec{p}(t)=(\vec{r}(t_0)\circ\vec{L}_+(t))\vec{p}(t) \quad , \quad \vec{p}(t)=m\vec{v}(t)$$

Moment pędu a wymiar trajektorii.

Dla ruchu zerowymiarowego t.j. dla spoczynku $\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)=c\vec{onst}$ wektor prędkości $\vec{v}(t)=\vec{0}$ czyli $\vec{L}(t)=m\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)=m\vec{r}(t)\times\vec{0}=\vec{0}$. Oba składniki zerują się $\vec{L}_+(t)=\vec{0}$, $\vec{L}_-(t)=\vec{0}$.

Dla ruchu jednowymiarowego t.j. prostoliniowego składnik momentu pędu $\vec{L}_+(t)=\vec{0}$.
Sprawdzamy ten fakt następująco. Niech wektor $\vec{b}=c\vec{onst}\neq\vec{0}$ oznacza wektor o kierunku zgodnym z kierunkiem prostej po której porusza się punkt materialny. Wtedy jest :

$P_{\vec{b}}\vec{r}_+(t)=\vec{r}_+(t)$, $P_{\vec{b}}\vec{v}_+(t)=\vec{v}_+(t)$. A zatem :

$$\vec{L}_+(t)=m\vec{r}_+(t)\times\vec{v}_+(t)=mP_{\vec{b}}\vec{r}_+(t)\times P_{\vec{b}}\vec{v}_+(t)=\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$$

Składnik $\vec{L}_-(t)\neq\vec{0}$ o ile tylko początek kartezjańskiego układu współrzędnych nie leży na prostej ruchu. Korzystając z właściwości momentu pędu :

$$\vec{L}_-(t)\equiv m\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)=m\pi_{\vec{v}(t)}\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)=m\pi_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t) \; .$$

W danej chwili ten sam moment pędu obserwują wszyscy obserwatorzy , którzy znajdują się na tej samej prostej równoległej do $\vec{b}$ tzn. mają ten sam wektor $\pi_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)$.
Reasumując dla ruchu jednowymiarowego jest $\vec{L}(t)=\vec{L}_-(t)=m\pi_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)$.

Dla trajektorii płaskiej t.j. dwuwymiarowej, dla której wektor $\vec{b}=c\vec{onst}\neq\vec{0}$ jest prostopadły do płaszczyzny ruchu, składnik $\vec{L}_+(t)$ ma stały kierunek t.j. $P_{\vec{b}}\vec{L}_+(t)=\vec{L}_+(t)$. Jest tak ponieważ $P_{\vec{b}}\vec{r}_+(t)=\vec{0}$, $P_{\vec{b}}\vec{v}_+(t)=\vec{0}$. Jeśli ponadto umieścimy początek układu współrzędnych na płaszczyznie ruchu to wtedy także $P_{\vec{b}}\vec{L}_-(t)=\vec{L}_-(t)$, co jest skutkiem dodatkowego warunku $P_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)=\vec{0}$. Wtedy moment pędu

$\vec{L}(t)=\vec{L}_+(t)+\vec{L}_-(t)=P_{\vec{b}}\vec{L}_+(t)+P_{\vec{b}}\vec{L}_-(t)=P_{\vec{b}}(\vec{L}_+(t)+\vec{L}_-(t))=P_{\vec{b}}\vec{L}(t)$ ma stały kierunek zgodny z wektorem $\vec{b}$.
Jeśli w ogólności obserwator znajduje się poza płaszczyzną ruchu to składnik $\vec{L}_-(t)$ nie ma stałego kierunku. Niemniej jednak możemy znaleźć składowe tego składnika momentu pędu pisząc :

$$\vec{L}_-(t)=m(P_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)+\pi_{\vec{b}}\vec{r}(t_0))\times\vec{v}(t)=mP_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)+m\pi_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)$$

Pierwszy składnik leży w płaszczyznie ruchu , drugi jest prostopadły do płaszczyzny ruchu.
Reasumując dla płaskiej trajektorii moment pędu można zawsze przedstawić w postaci sumy trzech składników :

$$\vec{L}(t)=\vec{L}_+(t)+m\pi_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)+mP_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)$$

Dwa pierwsze składniki są prostopadłe do płaszczyzny ruchu , trzeci leży w tej płaszczyznie.
W danej chwili tę samą składową płaszczyznową momentu pędu $mP_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t)$ obserwują wszyscy obserwatorzy , którzy znajdują się na tej samej płaszczyznie prostopadłej do $\vec{b}$ tzn. mają ten sam wektor $P_{\vec{b}}\vec{r}(t_0)$.

W przypadku trajektorii stricte trójwymiarowej nie zachodzą właściwości opisane powyżej dla przypadków 2 , 1 , 0 wymiarowych. Wektor momentu pędu wraz ze swoimi składnikami zmienia swój kierunek prostopadły do chwilowej płaszczyzny ruchu.

Prędkość polowa. Interpretacja geometryczna momentu pędu.
Przy pomocy wektora momentu pędu określamy wektor prędkości polowej :

$$\frac{d\vec{S}}{dt}\equiv\frac{\vec{L}(t)}{2m}\equiv\frac{1}{2}\vec{r}(t)\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Wektor ten jest prostopadły do płaszczyzny ruchu tworzonej przez wektor wodzący $\vec{r}(t)$ i wektor prędkości $\vec{v}(t)$. Wartość tego wektora to prędkość z jaką rośnie pole zakreślane przez wektor wodzący $\vec{r}(t)$ (jednoska = $\frac{m^2}{s}$). Szczególnie prosty przypadek stanowią ruchy dla których wektor wodzący zakreśla płaską powierzchnię. Tak jest dla dowolnego ruchu jednowymiarowego.
Dla ruchu jednowymiarowego jest :

$$\Delta_{[t_0,t]}\vec{S}=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(\vec{r}(t)\times\vec{v}(t))dt=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t))dt=\frac{1}{2}\vec{r}(t_0)\times\int_{t_0}^{t}(\vec{v}(t))dt=\frac{1}{2}\vec{r}(t_0)\times(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))$$

i w rezultacie :

$$\Delta_{[t_0,t]}\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{r}(t_0)\times\vec{r}(t)$$

Wartość tego wektora jest polem trójkąta , którego boki tworzą wektory $\vec{r}(t_0)$ i $\vec{r}(t)$:

$$\left|\Delta_{[t_0,t]}\vec{S}\right|=\frac{1}{2}\left|\vec{r}(t_0)\times\vec{r}(t)\right| \quad .$$

Podobne przykłady otrzymujemy rozpatrując ruchy płaskie dla których wektor $\vec{S}$ jest prostopadły do kierunku ruchu.

Przykład: moment pędu dla ruchu w polu grawitacyjnym Newtona.
Ruch planety o masie m w polu gwiazdy o masie M opisuje równanie Newtona :

$$m\ddot{\vec{r}}(t)=-\frac{GMm}{|\vec{r}(t)|^3}\vec{r}(t)$$

Mnożąc wektorowo obustronnie to równanie przez promień wodzący $\vec{r}(t)$ otrzymujemy :

$$m\vec{r}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)=-\frac{GMm}{|\vec{r}(t)|^3}\vec{r}(t)\times\vec{r}(t)$$

i oczywiście jest :

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r}(t)\times\vec{v}(t))=\vec{0}$$

co oznacza , że w tym układzie kartezjańskim moment pędu spełnia :

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0}$$

i w rezultacie jest :

$$\vec{L}(t)=\vec{const}$$

Dowodzi to faktu, iż trajektoria planety jest płaska.