Drgania .

Rozpatrujemy drgania harmoniczne i drgania harmoniczne tłumione. Zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami wiedzę o ruchu punktu materialnego możemy czerpać nie tylko z explicte otrzymanych rozwiązań równań Newtona, ale także z równań wynikających z równania dynamiki: równania energii i równania momentu pędu. Tak postąpiwszy otrzymamy charakterystykę geometryczną trajektorii , które dla rozpatrywanych drgań są conajwyżej płaskie.

Energia drgań .

Punkt materialny o masie m wykonujący drgania harmoniczne pod wpływem siły sprężystości podlega równaniu Newtona :

$$m\ddot{\vec{r}}(t)=-k\vec{r}(t)$$

Mnożąc równanie skalarnie obustronnie przez prędkość :

$$m\ddot{\vec{r}}(t)\circ\dot{\vec{r}}(t)=-k\vec{r}(t)\circ\dot{\vec{r}}(t)$$

Równanie możemy przedstawić w postaci :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t)|^2}{2}\right)=0$$

Oznacza to , że wielkość :

$$\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t)|^2}{2}=const$$

Stałą po prawej stronie wyznaczamy z warunków początkowych :

$$\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t)|^2}{2}=\frac{m|\vec{v}(t_0)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t_0)|^2}{2}$$

Wielkością zachowaną podczas drgań jest cakowita energia $E>0$:

$$\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t)|^2}{2}=E$$

Energia E jest sumą energii kinetycznej $E_K(t)=\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}$ i potencjalnej $E_P(t)=\frac{k|\vec{r}(t)|^2}{2}$.

Moment pędu drgań.

Mnożąc wektorowo obustronnie równanie Newtona drgań harmonicznych przez wektor wodzący :

$$m\vec{r}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)=-k\vec{r}(t)\times\vec{r}(t)$$

otrzymujemy :

$$m\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\times\vec{v}(t))=\vec{0}$$

W rezultacie otrzymujemy równanie momentu pędu :

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{0}$$

Podczas drgań harmonicznych stały pozostaje wektor momentu pędu :

$$\vec{L}(t)=\vec{const}$$

Stałą możemy wyznaczyć z warunków początkowych :

$$\vec{L}(t)=m\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t_0)$$

Podkreślmy, że początek układu kartezjańskiego znajduje się w położeniu równowagi tzn. w punkcie , w kórym siła sprężystości zeruje się $\vec{r}=\vec{0}$.

Geometria trajektorii drgań .

Możliwe są harmoniczne drgania 0 , 1 , 2 wymiarowe.

Drganie 0-wymiarowe to spoczynek w położeniu równowagi $\vec{r}(t)=\vec{0}$. Wynika stąd zerowy wektor prędkości $\vec{v}(t)=\vec{0}$. Oczywiście zeruje się moment pędu $\vec{L}(t)=m\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)=m\vec{0}\times\vec{0}=\vec{0}$ i energia drgań $E=\frac{m|\vec{0}|^2}{2}+\frac{k|\vec{0}|^2}{2}=0$.

Drganie 1-wymiarowe występuje, gdy wektor wodzący $\vec{r}(t)$ jest współliniowy z wektorem prędkości $\vec{v}(t)$ w każdej chwili czasu. Kierunek $\vec{b}=\vec{const}$ obu wektorów jest stały ponieważ zeruje się przyspieszenie normalne $\vec{a_N}=\vec{0}$. Zatem $P_{\vec{b}}\vec{r}(t)=\vec{r}(t)$, $P_{\vec{b}}\vec{v}(t)=\vec{v}(t)$.
Stąd wektor momentu pędu zeruje się $\vec{L}(t)=m\vec{r}(t_0)\times\vec{v}(t_0)=m\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)=mP_{\vec{b}}\vec{r}(t)\times P_{\vec{b}}\vec{v}(t)=\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$. Ponieważ nie zerują się równocześnie wielkości $\vec{r}(t_0)$ i $\vec{v}(t_0)$ (gdyby tak było otrzymalibyśmy opisany wyżej spoczynek) to energia drgań $\frac{m|\vec{v}(t_0)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t_0)|^2}{2}=E>0$. Drgania odbywają się po odcinku przechodzącym przez punkt $\vec{r}(t)=\vec{0}$ z amplitudą $\frac{2E}{k}$.

Drganie 2-wymiarowe występuje gdy moment pędu $\vec{L}(t)=\vec{const}\neq\vec{0}$. Płaszczyzna ruchu jest prostopadła do tego wektora $\vec{L}$. Oczywiście $\vec{r}(t)\circ\vec{L}(t)=0$ i $\vec{v}(t)\circ\vec{L}(t)=0$. Wektor wodzący i wektor prędkości leżą w tej płaszczyźnie $\pi_{\vec{L}}\vec{r}(t)=\vec{r}(t)$, $\pi_{\vec{L}}\vec{v}(t)=\vec{v}(t)$.
Podczas drgań w każdej chwili czasu :
a) wektory $\vec{r}(t)$ i $\vec{v}(t)$ nie są współliniowe b) punkt materialny nie zatrzymuje się $|\vec{v}(t)|>0$ c) punkt materialny nie przechodzi przez położenie równowagi $|\vec{r}(t)|>0$.
Gdyby wystąpiło zaprzeczenie którejkolwiek właściwości a) b) c) to przeczyłoby to warunkowi $\vec{L}\neq\vec{0}$. Stwierdzenie a) wraz z warunkiem $\vec{L}(t)=\vec{const}\neq\vec{0}$ dowodzi, iż mamy rzeczywiście do czynienia z trajektorią płaską. Stwierdzenia b) c) zapewniają że energia dwuwymiarowych drgań $\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t)|^2}{2}=E>0$. Powyższe stwierdzenia stają się bardziej czytelne jeśli weźmiemy pod uwagę , że rozwiązaniem równania Newtona w przypadku 2-wymiarowej trajektorii drgań jest elipsa o środku w położeniu równowagi.

Energia drgań tłumionych.

Punkt materialny o masie m wykonujący drgania harmoniczne pod wpływem siły sprężystości i siły oporu proporcjonalnej do prędkości podlega równaniu Newtona :

$$m\ddot{\vec{r}}(t)=-k\vec{r}(t)-b\dot{\vec{r}}(t)$$

Drgania takie nazywamy tłumionymi. Współczynniki są dodatnie $k>0$, $b>0$.
Mnożąc równanie skalarnie obustronnie przez prędkość :

$$m\ddot{\vec{r}}(t)\circ\dot{\vec{r}}(t)=-k\vec{r}(t)\circ\dot{\vec{r}}(t)-b\dot{\vec{r}}(t)\circ\dot{\vec{r}}(t)$$

a następnie całkując obustronnie po czasie otrzymujemy :

$$m\int_{t_0}^{t}\ddot{\vec{r}}(t)\circ\dot{\vec{r}}(t)\,dt=-k\int_{t_0}^{t}\vec{r}(t)\circ\dot{\vec{r}}(t)\,dt-b\int_{t_0}^{t}\dot{\vec{r}}(t)\circ\dot{\vec{r}}(t)\,dt$$

Po wycałkowaniu i prostych przekształceniach :

$$\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t)|^2}{2}=\frac{m|\vec{v}(t_0)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t_0)|^2}{2}-b\int_{t_0}^{t}|\vec{v}(t)|^2\,dt$$

Powyższe równanie energii możemy przepisać w postaci :

$$E(t)=E(t_0)-b\int_{t_0}^{t}|\vec{v}(t)|^2\,dt$$

Energia początkowa jest sumą początkowej kinetycznej i początkowej potencjalnej :

$$E(t_0)=\frac{m|\vec{v}(t_0)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t_0)|^2}{2}$$

Energia w chwili $t \geqslant t_0$ jest analogiczną sumą energii kinetycznej i potencjalnej :

$$E(t)=\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}+\frac{k|\vec{r}(t)|^2}{2}$$

Wprowadzenie siły oporu powoduje ubytek energii :

$E(t_0) \geqslant E(t)$ dla $t \geqslant t_0$

Jeśli punkt jest w ruchu to powoduje to ubytek energii punktu materialnego :

$$E(t)=E(t_0)-\Delta_{[t_0,t]}E$$

Funkcja ubytku energii jest niemalejącą funkcją czasu :

$$\Delta_{[t_0,t]}E \equiv b\int_{t_0}^{t}|\vec{v}(t)|^2\,dt$$

Podczas ruchu $|\vec{v}(t)|^2>0$ funkcja $\Delta_{[t_0,t]}E$ jest monotonicznie rosnąca w czasie.Na tej podstawie możemy przewidzieć, że energia punktu materialnego $E(t)$ podczas ruchu będzie nieustannie maleć aż do wartości zerowej. $E(t)\rightarrow 0$ implikuje $|\vec{v}(t)|\rightarrow 0$ i $|\vec{r}(t)|\rightarrow 0$. Tracąc energię punkt materialny traci prędkość i zmierza do położenia równowagi $\vec{r}(t)=\vec{0}$.

Moment pędu drgań tłumionych.

Mnożąc wektorowo obustronnie równanie Newtona drgań harmonicznych tłumionych przez wektor wodzący :

$$m\vec{r}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)=-k\vec{r}(t)\times\vec{r}(t)-b\vec{r}(t)\times\dot{\vec{r}}(t)$$

otrzymujemy :

$$m\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\times\vec{v}(t))=-b\vec{r}(t)\times\vec{v}(t)$$

czyli :

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t)\times m\vec{v}(t))=-\frac{b}{m}\vec{r}(t)\times m\vec{v}(t)$$

Otrzymujemy równanie momentu pędu :

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt}=-\frac{b}{m}\vec{L}(t)$$

Rozwiązaniem tego równania jest :

$$\vec{L}(t)=\vec{L}(t_0)e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$$

gdzie początkowy moment pędu wynosi :

$$\vec{L}(t_0)=\vec{r}(t_0)\times\vec{p}(t_0)$$

Otrzymujemy zatem wykładniczy zanik wektora momentu pędu.

Jeśli chodzi o geometrię trajektorii harmonicznych drgań tłumionych to występują tu właściwości podobne jak w dyskusji drgań harmonicznych nietłumionych. Także tu są możliwe trajektorie 0 ,1, 2 wymiarowe. Trajektoria dwuwymiarowa zawiera się w płaszczyznie prostopadłej do niezerowego wektora momentu pędu $\vec{L}(t)$, który ma stały kierunek. Trajektoria stricte trójwymiarowa nie występuje.