Uwagi o Grawitacji.

Porównamy tutaj grawitację przy powierzchni planety z grawitacją Newtonowską. Siłę grawitacji Newtona opisuje pole :

$$\vec{F}_N = -\frac{GMm}{|\vec{r}|^3}\vec{r} = -\frac{GMm}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}[x,y,z]$$

Przypominamy , że wektor siły grawitacji opisuje siłę przyciągania z jaką masa M umieszczona w początku układu współrzędnych przyciąga masę m umieszczoną w punkcie $\vec{r}=[x,y,z]$. Układ kartezjański, którego tu używamy, ma zatem początek w środku planety, ale pole grawitacyjne opisane powyżej dotyczy punktów na powierzchni planety i na zewnątrz planety t. j. dla punktów odległych o nie mniej niż promień planety $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant R$.

Energia potencjalna oddziaływania grawitacyjnego jest dana jako :

$$U_N(x,y,z) = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{GMm}{R}$$

Wybieramy tutaj dowolną stałą cechowania w ten sposób, aby energia potencjalna na powierzchni planety wynosiła zero. Ponieważ w bilansie energii występują tylko różnice energii potencjalnych to cechowanie nie wpływa na otrzymywane rezultaty. Pole grawitacyjne jest potencjalne :

$$\vec{F}_N = -grad\, U_N$$

Jeśli przyjmiemy, że obserwator znajduje się na powierzchni planety w punkcie $\vec{r_o}=[x_o, y_o, z_o]$ to możemy zdefiniować odpowiedni układ kartezjański jako

$$\vec{r_{obs}} \equiv \vec{r} - \vec{r_o} \equiv [x,y,z]-[x_o,y_o,z_o] \equiv [x-x_o, y-y_o, z-z_o] \equiv [\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}]$$

Jeśli oba układy będą powiązane translacją o wektor $\vec{r_o}=[x_o, y_o, z_o]=[0,0,R]$ to otrzymujemy :

$$[\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}+R]=[x,y,z]$$

Możemy wyrazić potencjał przez współrzędne obserwatora :

$$U_N(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = -\frac{GMm}{\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+(R+\tilde{z})^2}} + \frac{GMm}{R}$$

Licząc gradient we współrzędnych obserwatora otrzymujemy siłę grawitacji :

$$\vec{F}_N(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = -\frac{GMm}{\sqrt{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+(\tilde{z}+R)^2)^3}}[\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}+R]$$

Korzystamy tutaj z właściwości niezmienniczości gradientu przy translacjach :

$$grad = [\partial_x, \partial_y, \partial_z] = [\partial_{\tilde{x}}, \partial_{\tilde{y}}, \partial_{\tilde{z}}] \quad \text{ponieważ} \quad \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} = 1$$

czyli :

$$U_N(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+(R+\tilde{z})^2}} + \frac{GMm}{R}$$

Zauważmy, że gdy $x=\tilde{x}=0$, $y=\tilde{y}=0$ to trzecią współrzędną interpretujemy jako wysokość nad powierzchnią planety $\tilde{z}=h\geqslant 0$. Zakładamy teraz, że $h\ll R$. Opisujemy zatem pole blisko powierzchni planety. Defniujemy radialną wartość potencjału i radialną wartość siły :

$$U(h) \equiv U_N(0,0,h) = -\frac{GMm}{R+h} + \frac{GMm}{R}$$

$$\vec{F}(h) \equiv \vec{F}_N(0,0,h) = -\frac{GMm}{(R+h)^2}[0,0,1]$$

Korzystając z rozwinięcia w szereg funkcji :

$$\frac{1}{R+h} = \frac{1}{R}\frac{1}{1+\frac{h}{R}} = \frac{1}{R}\left(1-\frac{h}{R}+\frac{h^2}{R^2}-...\right) \approx \frac{1}{R}\left(1-\frac{h}{R}\right)$$

otrzymujemy energię potencjalną :

$$U(h) \approx \frac{GMmh}{R^2} = mgh$$, gdzie oznaczamy przez $g=\frac{GM}{R^2}$ przyspieszenie grawitacyjne.

Natomiast rozwijając w szereg funkcję :

$$\frac{1}{(R+h)^2}=\frac{1}{R^2}\frac{1}{(1+\frac{h}{R})^2}=\frac{1}{R^2}(1-2\frac{h}{R}+3\frac{h^2}{R^2}-...)\approx\frac{1}{R^2}$$

otrzymujemy stałą siłę grawitacji :

$$\vec{F}(h)\approx-\frac{GMm}{R^2}[0,0,1]=-mg$$

Wartość tej siły to ciężar $|\vec{F}(h)|\approx+mg$.

Pozostaje ocenić poziomą składową grawitacji w płaszczyznie stycznej do planety $\tilde{z}=0$ czyli $z=R$. Na osi pionowej składowa pozioma zeruje się , co wynika z symetrii osiowej pola grawitacyjnego. Sprawdzamy zatem zachowanie pola w odległości $r\equiv\sqrt{x^2+y^2}$ od osi w wyżej określonej płaszczyznie :

$$\pi_{\vec{e}_3}\vec{F}_N(r\cos\varphi,r\sin\varphi,0)=-\frac{GMm}{\sqrt{(r^2+R^2)^3}}\pi_{\vec{e}_3}[r\cos\varphi,r\sin\varphi,R]=-\frac{GMm}{\sqrt{(r^2+R^2)^3}}[r\cos\varphi,r\sin\varphi,0]$$

Wartość tej siły :

$$F(r)\equiv|\pi_{\vec{e}_3}\vec{F}_N(r\cos\varphi,r\sin\varphi,0)|=\frac{GMmr}{\sqrt{(r^2+R^2)^3}}$$

Jak wykazywaliśmy wyżej jest $F(0)=0$. Oczywiście dla $r\ll R$ składowa $F(r)$ jest znikomo mała np. w przypadku Ziemi. Ogólnie możemy porównać :

$$\frac{F(r)}{mg}=\frac{r/R}{((r/R)^2+1)^{3/2}}$$

Interesujące jest , że funkcja ta ma maksimum $\sqrt{\frac{4}{27}}$ w punkcie $\frac{r}{R}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.