Przestrzeń . Czas. Wektory.

Zmierzając do uściślenia pojęć otrzymujemy z reguły pewien zbiór wzbogacony odpowiednią strukturą. Naszkicujemy poniżej kilka pojęć prowadzących do matematycznego modelu otaczającej nas przestrzeni fizycznej : trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Przestrzeń ta wyposażona jest w strukturę metryczną t.j. pojęcie odległości zgodne z doświadczeniem.
Przestrzeń jest zbiorem punktów. Przestrzeń X nazywamy metryczną jeśli dla każdych dwóch punktów tej przestrzeni $p,q\in X$ określona jest nieujemna liczba $dist(p,q)\geqslant 0$ zwana odległością, spełniająca aksjomaty przestrzeni metrycznej. Właściwości przestrzeni odzwierciedlają jej przekształcenia $f:X\rightarrow X$. Przestrzeń metryczna wyróżnia zbiór przeształceń ciągłych i zbiór izometrii . Zauważmy rolę jaką pełni pojęcie odległości w obu poniższych definicjach :

$f\ jest\ ciągła\ w\ punkcie\ p_0\in X\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ dist(p,p_0)<\delta\Rightarrow dist(f(p),f(p_0))<\varepsilon$

$f\ jest\ izometrią\Leftrightarrow\forall\ p,q\in X\ dist(f(p),f(q))=dist(p,q)$

Jak łatwo spostrzec, każda izometria jest ciągła w każdym punkcie tzn. izometrie są podzbiorem przekształceń ciągłych. Każdy podzbiór przestrzeni metrycznej $X_0\subset X$ ma swój obiektywny kształt zachowywany przez wszystkie izometrie.
Podamy teraz przykłady przestrzeni metrycznych.
Prosta euklidesowa $X\simeq\mathbb{R}$. Przestrzeń ta jest izometryczna z prostą liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ .Na prostej wprowadzamy współrzędne rzeczywiste $p\rightarrow x(p)$ w ten sposób, że odległość na prostej $dist(p,q)=+\sqrt{(x(p)-x(q))^2}=|x(p)-x(q)|$. Izometrie to translacje $x\rightarrow x+a$, odbicie $x\rightarrow -x$ względem punktu $x_0=0$ lub odbicie względem dowolnego punktu x_0 :
$x\rightarrow -x+2x_0$
Płaszczyzna euklidesowa $X\simeq\mathbb{R}^2$. Przestrzeń X jest izometryczna z płaszczyzną $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Współrzędną kartezjańską x na płaszczyznie określamy przy pomocy rodziny równoległych prostych euklidesowych. Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi jedna taka prosta .Równanie $x=const$ jest równaniem prostej prostopadłej do rodziny prostych równoległych. W ten sposób funkcja $p\rightarrow x(p)$ jest określona na całej płaszczyznie. Wybieramy dwie prostopadłe współrzędne kartezjańskie $p\rightarrow x_1(p)$, $p\rightarrow x_2(p)$. Otrzymujemy stąd jednoznaczne odwzorowanie punktów płaszczyzny $p\rightarrow[x_1(p),x_2(p)]$ do zbioru $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Odległość na płaszczyznie $dist(p,q)=+\sqrt{(x_1(p)-x_1(q))^2+(x_2(p)-x_2(q))^2}$ spełnia tw. Pitagorasa. Izometrie płaszczyzny euklidesowej to translacje , obroty wokół dowolnego punktu , odbicia względem dowolnego punktu, odbicia względem dowolnej prostej.
Przestrzeń euklidesowa $X\simeq\mathbb{R}^3$. Przestrzeń ta jest izometryczna z przestrzenią $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ .Współrzędną kartezjańską x w przestrzeni określamy przy pomocy rodziny równoległych prostych euklidesowych. Przez każdy punkt przestrzeni przechodzi jedna taka prosta .Równanie $x=const$ jest równaniem płaszczyzny prostopadłej do rodziny prostych równoległych. W ten sposób funkcja $p\rightarrow x(p)$ jest określona na całej przestrzeni. Wybieramy trzy prostopadłe współrzędne kartezjańskie $p\rightarrow x_1(p)$, $p\rightarrow x_2(p)$, $p\rightarrow x_3(p)$.
Otrzymujemy stąd jednoznaczne odwzorowanie punktów płaszczyzny $p\rightarrow[x_1(p),x_2(p),x_3(p)]$ do zbioru $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Odległość w przestrzeni
$dist(p,q)=+\sqrt{(x_1(p)-x_1(q))^2+(x_2(p)-x_2(q))^2+(x_3(p)-x_3(q))^2}$ spełnia trójwymiarowe tw. Pitagorasa. Izometrie przestrzeni euklidesowej to translacje , obroty wokół dowolnej osi , odbicia względem dowolnego punktu, odbicia względem dowolnej prostej, odbicia względem dowolnej płaszczyzny.
Ponieważ izometrie zachowują kształt , przeprowadzają proste w proste , płaszczyzny w płaszczyzny. Izometrie zachowują równoległość i prostopadłość prostych. Wynika stąd , że dowolne dwa układy kartezjańskich współrzędnych łączy izometria.
Obiekty $\vec{r}(p)\equiv[x_1(p),x_2(p),x_3(p)]$ nazywamy wektorami. W zbiorze wektorów określone jest dodawanie wektorów $\vec{r}(p)+\vec{r}(q)$ i mnożenie wektora przez liczbę $\alpha\,\vec{r}(p)$. Stosując nieco bardziej abstrakcyjny zapis wektorów:

$\vec{a}=[a_1, a_2, a_3]$ zapisujemy definicję sumy wektorów :

$$\vec{a}+\vec{b}\equiv[a_1, a_2, a_3]+[b_1, b_2, b_3]\equiv[a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3]$$

i iloczynu wektora przez liczbę :

$$\alpha\vec{a}\equiv\alpha[a_1, a_2, a_3]\equiv[\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3]$$

Oba działania spełniają aksjomaty przestrzeni wektorowej.
Klamrowy zapis wektora:

$$\vec{a}=[a_1, a_2, a_3]$$

jest ekwiwalentny zapisowi przy użyciu wektorów bazy :

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

Użyte tutaj wektory bazy skojarzone z kartezjanskim układem współrzędnych to :

$$\vec{e}_1=[1,0,0] \quad , \quad \vec{e}_2=[0,1,0] \quad , \quad \vec{e}_3=[0,0,1]$$

Przestrzeń fizyczna X jest trójwymiarową przestrzenią euklidesową, wyposażoną w opisaną powyżej odległość. Punkty tej przestrzeni możemy , przez wprowadzenie układu kartezjańskiego , utożsamić z wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ co zapisujemy $X\simeq\mathbb{R}^3$. Nie piszemy $X=\mathbb{R}^3$ bo przestrzeń fizyczna składa się z punktów a nie liczb. Odległości między punktami $dist(p,q)\geqslant 0$ mierzymy przy pomocy lini geodezyjnych to jest najkrótszych, łączacych punkty. W przestrzeni euklidesowej są to linie proste.

Def. iloczyn skalarny wektorów :

$$\vec{a}\circ\vec{b}\equiv[a_1, a_2, a_3]\circ[b_1, b_2, b_3]\equiv a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3$$

Iloczyn skalarny wiąże się z euklidesową geometrią przestrzeni wektorowej przez fakt , że długość dowolnego wektora $|\vec{a}|\equiv\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ wyraża się przez iloczyn skalarny :

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\circ\vec{a}}$$

Długość dowolnego wektora jest nieujemna $|\vec{a}|\geqslant 0$. Jedynym wektorem o długości zerowej jest wektor zerowy $\vec{0}=[0,0,0]$, $|\vec{0}|=0$.
Iloczyn skalarny można zdefiniować przy pomocy pojęcia długości wektora :

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$$

Stw. podstawowa właściwość iloczynu skalarnego :

$$\vec{a}\circ\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Szkic dowodu.
Mając dane wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ obracamy je w ten sposób, że po wykonaniu obrotu ich obrazami będą odpowiednio wektory $\vec{a}\,'$ i $\vec{b}\,'$. Podczas obrotu nie zmieniają się długości wektorów i kąt między nimi . Możemy w ten sposób otrzymać obrazy wektorów leżące w płaszczyznie $x_1 x_2$ i które są postaci :

$$\vec{a}\,'=[|\vec{a}|\cos\varphi_1, |\vec{a}|\sin\varphi_1, 0] \quad , \quad \vec{b}\,'=[|\vec{b}|\cos\varphi_2, |\vec{b}|\sin\varphi_2, 0]$$

Kąty φ_1 i φ_2 to kąty jakie tworzą wektory $\vec{a}\,'$ i $\vec{b}\,'$ z osią x_1 . Ich różnicę identyfikujemy z kątem $\pm\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ między wektorami.
Ponieważ iloczyn skalarny nie zmienia wartości przy obrotach wektorów :

$$\vec{a}\circ\vec{b}=\vec{a}\,'\circ\vec{b}\,'=|\vec{a}||\vec{b}|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\varphi_2-\varphi_1)=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \quad .$$

Def. prostopadłość wektorów :

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\circ\vec{b}=0$$

Fakt prostopadłości dowolnych wektorów oznaczamy $\vec{a}\perp\vec{b}$. Dwa niezerowe wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są prostopadłe, gdy kąt między nimi jest prosty czyli wynosi $\varphi=\frac{\pi}{2}$ radianów. Wtedy $\cos\varphi=\cos(\frac{\pi}{2})=0$ i zeruje się iloczyn skalarny $\vec{a}\circ\vec{b}=0$. W przypadku wektora zerowego kąt między wektorami nie jest określony , ale $\vec{a}\circ\vec{0}=0$ i w szczególności $\vec{0}\circ\vec{0}=0$. Definicja uogólnia pojęcie prostopadłości przyjmując, że wektor zerowy jest prostopadły do wszystkich wektorów , w szczególności do samego siebie tzn. $\vec{0}\perp\vec{a}$, $\vec{0}\perp\vec{0}$.

Def. **rzut ortogonalny** :

$$P_{\vec{b}}\vec{a}\equiv\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{\vec{b}\circ\vec{b}}\vec{b}$$

Wektor $P_{\vec{b}}\vec{a}$ nazywa się rzutem ortogonalnym (=prostopadłym) wektora $\vec{a}$ na kierunek wektora $\vec{b}$. W powyższej definicji zakładamy , że wektor $\vec{b}\neq\vec{0}$.

Def. **dopełnienie rzutu otogonalnego** :

$$\pi_{\vec{b}}\vec{a}\equiv\vec{a}-P_{\vec{b}}\vec{a}$$

Oczywiście wektor jest sumą swojego rzutu ortogonalnego i swojego dopełnienia :

$$\vec{a}=P_{\vec{b}}\vec{a}+\pi_{\vec{b}}\vec{a}$$

Jeśli wektor $\vec{b}$ oznacza wektor prostopadły do płaszczyzny to rzutem wektora $\vec{a}$ na tę płaszczyznę jest wektor $\pi_{\vec{b}}\vec{a}$.

Def. **iloczyn wektorowy**:

$$\vec{a}\times\vec{b}\equiv[a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1]$$

Definicję tę można wyrazić przez wyznacznik :

$$\vec{a}\times\vec{b}=det\begin{bmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}$$

Korzystając z rozwinięcia Laplace’a tego wyznacznika względem pierwszego wiersza otrzymujemy :

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-1)^{1+1}det\begin{bmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix}\vec{e}_1+(-1)^{1+2}det\begin{bmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{bmatrix}\vec{e}_2+(-1)^{1+3}det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\vec{e}_3$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=[+det\begin{bmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix},-det\begin{bmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{bmatrix},+det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}]$$

Macierze 2×2 występujące w rozwinięciu Laplace’a nazywają się minorami. Minory powstają przez wykreślenie z dużej macierzy 3×3 odpowiedniego wiersza i kolumny.

Zilustrujemy rozwinięcie Laplace’a najprostszym przykładem. Niech a oznacza liczbę , $[a]$ macierz 1×1 , $det[a]$ wyznacznik tej macierzy. Oczywiście $det[a]=a$. Obliczamy wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ stosując rozwinięcie Laplace’a:

$$det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=+a\,det[d]-b\,det[c]=+ad-bc$$

Przykład . Ilustrujemy iloczyn wektorowy obliczeniem dla wektorów leżących w płaszczyźnie $x_1 x_2$, które są postaci :

$\vec{a}\,'=[|\vec{a}|\cos\varphi_1,|\vec{a}|\sin\varphi_1,0]$, $\vec{b}\,'=[|\vec{b}|\cos\varphi_2,|\vec{b}|\sin\varphi_2,0]$

$\vec{a}\,'\times\vec{b}\,'=[0,0,|a||b|(\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]=[0,0,|a||b|\sin(\varphi_2-\varphi_1)]=[0,0,|a||b|\sin\varphi]$

Stw. podstawowa właściwość iloczynu wektorowego :

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ponieważ $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ to $\sin\varphi\geqslant 0$ i oczywiście $|\vec{a}\times\vec{b}|\geqslant 0$.

Liczba $|\vec{a}\times\vec{b}|$ jest polem równoległoboku o bokach $\vec{a}$ i $\vec{b}$, natomiast liczba $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ jest polem odpowiedniego trójkąta.

Iloczyn mieszany wyraża się przez wyznacznik :

$$(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}=det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego $|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$ wyraża objętość równoległościanu o krawędziach $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, natomiast liczba $\frac{1}{2}|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$ jest objętością odpowiedniego czworościanu.

Posługując się wielkościami $|\vec{a}\times\vec{b}|$, $|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$ można obliczać pola wielokątów i objętości brył wielościennych , dzieląc je odpowiednio na trójkąty i czworościany. Trójkąt to figura o najmniejszej ilości boków , czworościan to bryła o najmniejszej ilości ścian.

Podobnie jak dla przestrzeni fizycznej X geometria dostarcza modelu matematycznego czasu T . Jako zbiór T składa się z abstrakcyjnych chwil $\tau\in T$. Model osi czasu postuluje linearność czasu (chwile jako punkty na linii prostej) , kierunek przepływu czasu (strzałka czasu , przyszłość i przeszłość) , jednostajność przepływu czasu (jednostka = sekunda) , miarę upływu czasu (odległość w czasie). Oś czasu jest euklidesową prostą $T\simeq\mathbb{R}$ wyposażoną w odległość euklidesową $dist(\tau_0,\tau_1)\equiv+\sqrt{(t(\tau_0)-t(\tau_1))^2}=|t(\tau_0)-t(\tau_1)|$, gdzie $\tau_1,\tau_2\in T$ to chwile czyli punkty na osi czasu , zaś $t(\tau_1),t(\tau_2)\in\mathbb{R}$ to liczby w sekundach czyli wskazania zegara.

Przykład. Niech τ_0 oznacza chwilę poczatkową zajęć , τ_1 końcową chwilę zajęć. Wtedy jest $dist(\tau_0,\tau_1)=5400\,sekund$.