Pęd i Energia .

Podstawowe zadanie dynamiki to rozwiązanie równania Newtona. Jest to znalezienie trajektorii po której porusza się masywna punktowa cząstka pod wpływem działającej siły. Jednoznaczne znalezienie owej trajektorii wymaga znajomości warunków początkowych : prędkości i położenia. Najprostszą strategią rozwiązywania równania Newtona jest obustronne całkowanie równania po czasie. Jakkolwiek dla pewnej klasy zagadnień metoda jest skuteczna , to w ogólności zagadnienie komplikuje się : otrzymujemy równanie całkowe tzn. całkę z nieznanej funkcji. Stąd potrzeba stosowania innych metod : ścisłych jak rozdzielenie zmiennych czy też przybliżonych jak metody numeryczne. Niezależnie od stopnia dokładności w jakim stosowane metody pozwalają rozwiązać dane zagadnienie , jest to proces niezależny od obiektywnego istnienia trajektorii równania Newtona . Mimo powyższego , całkowanie równania Newtona prowadzi do definicji nowych pojęć : wektora pędu i energii kinetycznej. Obie wielkości są odpowiednio wektorową i skalarną miarą ilości ruchu.

Pęd . Impuls siły.

Całkując równanie Newtona obustronnie po czasie :

$$m\vec{v}(t)\Big|_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\,dt$$

otrzymujemy :

$$m\vec{v}(t)-m\vec{v}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\,dt$$

Lewa strona równania zawiera wektor pędu cząstki $\vec{p}\equiv m\vec{v}$. Prawa strona równania to impuls siły: $\vec{I}_{[t_0,t]}\equiv\int_{t_0}^{t}\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\,dt$. Zmiana wektora pędu w danym przedziale czasu to impuls siły :

$$\vec{p}(t)-\vec{p}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\,dt \quad , \quad \Delta_{[t_0,t]}\vec{p}\equiv\vec{p}(t)-\vec{p}(t_0) \quad , \quad \Delta_{[t_0,t]}\vec{p}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\,dt \quad , \quad \Delta_{[t_0,t]}\vec{p}=\vec{I}_{[t_0,t]}$$

Równanie Newtona brzmi teraz :

$$\dot{\vec{p}}=\vec{F}$$

Szybkość zmiany wektora pędu cząstki jest równa wektorowi siły działajacej na tę cząstkę.

Energia kinetyczna.Praca.

Równanie Newtona można obustronnie pomnożyć skalarnie przez wektor prędkości.

$$m\dot{\vec{v}}(t)\circ\vec{v}(t)=\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\circ\vec{v}(t)$$

W rezultacie otrzymuje się równanie skalarne. Obustronnie całkując to równanie po czasie :

$$\left.\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}\right|_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\circ\vec{v}(t)\,dt$$

otrzymujemy :

$$\frac{m|\vec{v}(t)|^2}{2}-\frac{m|\vec{v}(t_0)|^2}{2}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\circ\vec{v}(t)\,dt$$

Po lewej stronie równania występuje wielkość nazywana energią kinetyczną :

$$E_K\equiv\frac{m|\vec{v}|^2}{2}$$

Po prawej stronie równania występuje wielkość nazywana pracą :

$$W_{[t_0,t]}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\circ\vec{v}(t)\,dt$$

Jako wniosek wynikający z Równania Newtona otrzymuje się , że zmiana energii kinetycznej punktu materialnego w danym przedziale czasu $[t_0, t]$ jest równa pracy wykonanej przes siłę działającą na punkt materialny w tym przedziale czasu:

$$E_K(t)-E_K(t_0)=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\circ\vec{v}(t)dt \quad , \quad \Delta_{[t_0,t]}E_K\equiv E_K(t)-E_K(t_0) \quad , \quad \Delta_{[t_0,t]}E_K=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\circ\vec{v}(t)dt$$

$$\Delta_{[t_0,t]}E_K=W_{[t_0,t]}$$

Możliwe są trzy przypadki : $W_{[t_0,t]}>0$, energia kinetyczna rośnie , $W_{[t_0,t]}=0$ energia kinetyczna nie zmienia się , $W_{[t_0,t]}<0$, energia kinetyczna maleje .

Jeśli nie prowadzi to do nieporozumień to możemy pomijać symbol przedziału czasu pisząc $\Delta\vec{p}=\vec{I}$, $\Delta E_K=W$ zamiast $\Delta_{[t_0,t]}\vec{p}=\vec{I}_{[t_0,t]}$, $\Delta_{[t_0,t]}E_K=W_{[t_0,t]}$.

Pracę we współrzędnych kartezjańskich zapisujemy :

$$W=\int_{t_0}^{t}(F_x(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)\dot{x}(t)+F_y(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)\dot{y}(t)+F_z(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)\dot{z}(t))dt$$

Upraszczając zapis :

$$W=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\circ\vec{v}(t)dt=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\circ d\vec{r}=\int_{t_0}^{t}(F_x dx+F_y dy+F_z dz) \quad , \quad \vec{F}=[F_x, F_y, F_z] \quad , \quad d\vec{r}=[dx, dy, dz]$$

Obiekty całkowe jak impuls siły $\vec{I}_{[t_0,t_1]}\equiv\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)dt$ i praca wykonana przez siłę

$W_{[t_0,t_1]}=\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)\circ\vec{v}(t)dt$ nie są całkami w zwykłym sensie. Obiekty $\vec{I}_{[t_0,t_1]}$, $W_{[t_0,t_1]}$ nazywają się funkcjonałami. Stają się one całkami jednej zmiennej po uprzednim podstawieniu trajektorii t.j. funkcji położenia i prędkości $x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ określonych w przedziale czasu $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Taką zależność nazywamy funkcjonalną w odróżnieniu od funkcyjnej tzn. zmienną jest trajektoria a nie punkt. W szczególności zmienną , którą możemy podstawić do funkcjonału jest trajektoria , która jest rozwiązaniem równania Newtona.

W przypadku , gdy pole siły zależy tylko od położenia :

$$\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$$

czyli :

$$\vec{F}(x, y, z)=[F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)]$$

zadajemy pytanie czy istnieje funkcja skalarna $U=U(x, y, z)$, która spełnia :

$$-\frac{\partial U}{\partial x}=F_x \quad , \quad -\frac{\partial U}{\partial y}=F_y \quad , \quad -\frac{\partial U}{\partial z}=F_z$$

Możemy sformułować ten problem używając operatora gradientu :

$$-grad\, U=\vec{F}$$

gdzie $grad\equiv[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}]$ i $grad\, U=[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}]$. Operator gradientu przypisuje polu skalarnemu pole wektorowe.

Jeśli odpowiedź jest twierdząca i odpowiednia funkcja istnieje to można zapisać funkcjonał pracy jako :

$$W=\int(F_x dx+F_y dy+F_z dz)=-\int(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz)=-\int dU=-\Delta U$$

Bardziej precyzyjnie :

$$W_{[t_0,t]}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\circ d\vec{r}=-\int_{t_0}^{t}dU(x(t), y(t), z(t))=-U(x(t), y(t), z(t))+U(x(t_0), y(t_0), z(t_0))=-\Delta_{[t_0,t]}U$$

Krótko :

$$W_{[t_0,t]}=-\Delta_{[t_0,t]}U$$

Oznacza to , że praca wykonywana przez siłę potencjalną zależy tylko od punktu początkowego i końcowego. Funkcję $U=U(x,y,z)$ nazywamy potencjałem pola $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$. Istnienie potencjału U wprost wiąże się z pojęciem energii potencjalnej.

Kryterium istnienia potencjału U .
Kryterium otrzymuje się przez zamianę całki po drodze na całkę powierzchniową :

$$W=\int (F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz)=\int (\partial_y F_z-\partial_z F_y)\,dydz+(\partial_z F_x-\partial_x F_z)\,dzdx+(\partial_x F_y-\partial_y F_x)\,dxdy$$

Używamy tutaj notacji dla pochodnych cząstkowych $\partial_x\equiv\frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y\equiv\frac{\partial}{\partial y}$, $\partial_z\equiv\frac{\partial}{\partial z}$.

Możemy też napisać :

$$W=\int \vec{F}\circ d\vec{r}=\int rot\,\vec{F}\circ d\vec{S} \quad , \quad d\vec{S}=[dydz\,,dzdx\,,dxdy]$$

Jeśli pole jest potencjalne całka powyższa powinna się zerować po dowolnej drodze zamkniętej. Stąd wynika zerowanie się pola podcałkowego w całce powierzchniowej :

$$[\partial_y F_z-\partial_z F_y\,,\partial_z F_x-\partial_x F_z\,,\partial_x F_y-\partial_y F_x]=\vec{0}$$

Powyższe równanie zapisujemy krótko przy pomocy operatora rotacji :

$$rot\,\vec{F}=\vec{0}$$

Kryterium istnienia potencjału możemy zapisać w zwartej formie :

$$\vec{F}=-grad\,U\Leftrightarrow rot\,\vec{F}=\vec{0}$$

dla $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$, $U=U(x,y,z)$.
Dla danego pola $\vec{F}$ istnieje tylko jeden potencjał z dokładnością do stałej funkcji tzn.
Jeśli $\vec{F}=-grad\,U_1$ i $\vec{F}=-grad\,U_2$ to $U_2=U_1+const$.

Przykład. Stałe pole grawitacyjne.

$$\vec{F}(x,y,z)=[0,0,-mg]$$

Oczywiście $rot\,\vec{F}=\vec{0}$. Potencjał $U(x,y,z)=mgz-mgz_0$. Stałą mgz_0 możemy wybrać dowolnie. Wybór stałej nazywamy cechowaniem potencjału. Praca nie zależy od cechowania :

$$W=-U(x_2,y_2,z_2)+U(x_1,y_1,z_1)=-mgz_2+mgz_0+mgz_1-mgz_0=mg(z_1-z_2)$$

Przykład. Pole grawitacji Newtona.

$$\vec{F}_N=-\frac{GMm}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \quad \text{czyli} \quad \vec{F}_N(x,y,z)=-\frac{GMm}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}[x,y,z] \quad .$$

Pole jest określone wszędzie poza początkiem układu współrzędnych. Odpowiedni potencjał jest dany jako $U(x,y,z)=-\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+const$. Sprawdzamy także $rot\,\vec{F}_N=\vec{0}$.

Zasada superpozycji sił dla sił potencjalnych prowadzi do dodawania potencjałów .