Kinematyka. Nauka o Ruchu.

Kinematyka to nauka o ruchu. Przedmiotem zainteresowania kinematyki są trajektorie kreślone przez punkty w przestrzeni. Gdy zawęzimy tak obszerne pole zagadnień do badania ruchu punktu materialnego , otrzymujemy opis ruchu przy pomocy osi czasu T i euklidesowej trójwymiarowej przestrzeni X .Trajektorią punktu materialnego nazywamy odwzorowanie z osi czasu T do przestrzeni X . Chwili $\tau \in T$ przypisujemy położenie $p \in X$ czyli odwzorowujemy $\tau \rightarrow p$. Wybierając współrzędne kartezjańskie w T i X otrzymujemy $t(\tau) \rightarrow [x_1(p), x_2(p), x_3(p)]$ co jest równoważne definicji trajektorii jako odwzorowania $\mathbb{R} \ni t \rightarrow [x_1(t), x_2(t), x_3(t)] \in \mathbb{R}^3$. Powyższe stwierdzenia prowadzą do następujących definicji :

Def. wektor wodzący :

$$\vec{r}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$$

Def.wektor prędkości :

$$\vec{v}(t) = [\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}]$$

Def.wektor przyspieszenia :

$$\vec{a}(t) = [\frac{d^2 x_1}{dt^2}, \frac{d^2 x_2}{dt^2}, \frac{d^2 x_3}{dt^2}]$$

Wektor wodzący definiuje trajektorię punktu materialnego. Oznacza to, że w tej definicji zawarte są wszystkie właściwości ruchu. Wektory prędkości i przyspieszenia , otrzymane przez różniczkowanie , są jednoznacznie określone przez wektor wodzący. Zaznaczmy, że powyższe definicje używają kartezjańskich wektorów bazowych niezależnych od czasu:

$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{0}$, $\frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{0}$ .Wektory przyspieszeń wyższych rzędów definiuje się analogicznie przez różniczkowania wektora wodzącego po czasie $\frac{d^n \vec{r}}{dt^n}$, $n \geqslant 3$. Dla oznaczenia pochodnych wektorów po czasie stosuje się ekwiwalentnie notacje :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad , \quad \vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} \quad , \quad \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{v}(t) = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3] \quad , \quad \vec{a}(t) = [\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3]$$

Kropki w powyzszych wyrażeniach oznaczają pochodne funkcji $f = f(t)$ po czasie :

$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$, $\ddot{f} \equiv \frac{d^2 f}{dt^2}$, etc.

Pojęcie euklidesowego iloczynu skalarnego przenosi się na wektory prędkości i przyspieszenia. Długości wektorów określamy przy pomocy iloczynu skalarnego :

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \circ \vec{v}} \quad , \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}} \quad .$$

Wartość wektora prędkości jest dana jako :

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3)^2}$$

Wartość wektora przyspieszenia jest dana jako :

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(\ddot{x}_1)^2 + (\ddot{x}_2)^2 + (\ddot{x}_3)^2}$$

Wektor przyspieszenia $\vec{a}(t)$ możemy zrzutować ortogonalnie na kierunek ruchu wyznaczony przez wektor predkości $\vec{v}(t)$. Otrzymany w ten sposób wektor nazywamy przyspieszeniem stycznym.

Def. wektor przyspieszenia stycznego

$$\vec{a}_S(t) \equiv P_{\vec{v}(t)} \vec{a}(t)$$

Dopełnienie ortogonalne tego rzutu nazywamy wektorem przyspieszenia normalnego.

Def. wektor przyspieszenia normalnego

$$\vec{a}_N(t) \equiv \pi_{\vec{v}(t)} \vec{a}(t)$$

Oba wektory leżą w płaszczyznie ruchu zdefiniowanej przez wektory $\vec{v}(t)$ i $\vec{a}(t)$. Oczywiście jest $\vec{a}(t)=\vec{a}_S(t)+\vec{a}_N(t)$ oraz $\vec{a}_S(t)\circ\vec{a}_N(t)=0$. Wektor styczny ma ten sam kierunek co kierunek ruchu wyznaczony przez wektor prędkości. Kierunek ruchu i jego zwrot wyznacza wersor styczny $\vec{t}\equiv\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Przyspieszenie normalne definiuje wersor normalny $\vec{n}\equiv\frac{\vec{a}_N}{|\vec{a}_N|}$. Wersor binormalny $\vec{b}\equiv\vec{t}\times\vec{n}$ jest prostopadły do płaszczyzny ruchu.
Uwaga : sytuacje , w których powyższe definicje nie funkcjonują ($\vec{v}(t)=\vec{0}$ lub $\vec{a}_N(t)=\vec{0}$) są wyjątkami od reguły, które łatwo opisać (spoczynek , ruch po linii prostej).
Przyspieszenie styczne odpowiada za zmianę wartości prędkości :

$$|\vec{a}_S(t)|=\left|\frac{d|\vec{v}(t)|}{dt}\right|$$

Przyspieszenie normalne odpowiada za zakrzywienie trajektorii :

$$|\vec{a}_N(t)|=\frac{|\vec{v}(t)|^2}{\rho(t)}$$

gdzie funkcja $\rho=\rho(t)$ jest promieniem krzywizny trajektorii.

Interpretacja kierunku stycznego i promienia krzywizny.

Prosta styczna do trajektorii i promień krzywizny trajektorii jest funkcją punktu tej trajektorii.
W danej chwili t_0 kierunek styczny do trajektorii w punkcie $\vec{r}(t_0)$ wyznacza wektor $\vec{v}(t_0)$.
Gdyby od tej chwili t_0 wyzerować wektor przyspieszenia , to punkt poruszałby się po prostej stycznej do trajektorii w punkcie $\vec{r}(t_0)$ ze stałą prędkością $\vec{v}(t_0)$.
W danej chwili t_0 promień krzywizny trajektorii to promień okręgu stycznego do trajektorii w punkcie $\vec{r}(t_0)$. Okrąg ten leży w płaszczyznie ruchu i ma promień $R\equiv\rho(t_0)$. Gdyby od tej chwili t_0 wyzerować składową styczną przyspieszenia, to punkt poruszałby się z prędkością o stałej wartości $|\vec{v}(t_0)|$ pod wpływem stałego przyspieszenia dośrodkowego $\frac{|\vec{v}(t_0)|^2}{R}$ po okręgu o promieniu $R\equiv\rho(t_0)$ stycznym do trajektorii w punkcie $\vec{r}(t_0)$.
Prosta styczna i okrąg styczny są wyznaczone jednoznacznie t.j. trajektoria ma tylko jedną prostą i jeden okrąg styczne w punkcie. Zależą one tylko od kształtu trajektorii , nie zależą od sposobu jej pokonywania t.j. od prędkości.

W trakcie ruchu od chwili t_A do chwili t_B punkt materialny zmienia swoje położenie z punktu $\vec{r}(t_A)$ do punktu $\vec{r}(t_B)$.

Def. wektor przemieszczenia

$$\vec{r}_{AB}\equiv\vec{r}(t_B)-\vec{r}(t_A)$$

Wektor przemieszczenia spełnia równanie $\vec{r}(t_A)+\vec{r}_{AB}=\vec{r}(t_B)$. Wartością przemieszczenia nazywamy euklidesową odległość między punktami $r_{AB}=|\vec{r}_{AB}|=|\vec{r}(t_B)-\vec{r}(t_A)|$.

Def.droga punktu materialnego

$$s_{AB}\equiv\int_{t_A}^{t_B}|\vec{v}(t)|dt=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{(\dot{x}_1)^2+(\dot{x}_2)^2+(\dot{x}_3)^2}\,dt$$

Jest to długość krzywej przebytej przez punkt materialny. Oczywiście $s_{AB}\geqslant r_{AB}$. Jeśli mamy daną drogę $s=s(t)$ w funkcji czasu , to jej pochodna $\frac{ds}{dt}=|\vec{v}(t)|$.

Klasyfikacja trajektorii.

Ruchy klasyfikujemy ze względu na ich cechy, które określone są przez składowe naturalne przyspieszenia $\vec{a}_S$ i $\vec{a}_N$. Jeżeli $\vec{a}_S(t)=\vec{0}$ to ruch nazywa się jednostajny i charakteryzuje się stałą wartością prędkości $|\vec{v}(t)|=const$ czyli jest nieprzyspieszony. W przeciwnym wypadku dla ruchu przyspieszonego jest $\vec{a}_S(t)\neq\vec{0}$. Jeżeli $\vec{a}_N(t)=\vec{0}$ to ruch jest prostoliniowy, natomiast gdy $\vec{a}_N(t)\neq\vec{0}$ ruch jest krzywoliniowy.

Trajektorie klasyfikuje się geometrycznie jako 0 , 1 , 2 , 3 wymiarowe. Odpowiednio są to punkt , prosta , trajektoria płaska , trajektoria stricte trójwymiarowa.
Ruch odbywa się po płaszczyznie jeśli dla dowolnych chwil czasu t_1, t_2 :

$$\pi_{\vec{b}}(\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1))=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)$$

gdzie $\vec{b}=\vec{const}$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny ruchu. W szczególności dla dowolnej chwili czasu :

$$\pi_{\vec{b}}(\vec{r}(t)-\vec{r}(0))=\vec{r}(t)-\vec{r}(0)$$

Różniczkując otrzymujemy warunek dla wektora prędkości :

$$\pi_{\vec{b}}(\vec{v}(t))=\vec{v}(t)$$

Ponownie różniczkując otrzymujemy warunek dla wektora przyspieszenia :

$$\pi_{\vec{b}}(\vec{a}(t))=\vec{a}(t)$$

Powyższe warunki można wyrazić przez pojęcie prostopadłości :

$$\vec{b}\circ(\vec{r}(t)-\vec{r}(0))=0 \quad , \quad \vec{b}\circ\vec{v}(t)=0 \quad , \quad \vec{b}\circ\vec{a}(t)=0$$

Dla takiego ruchu można wybrać układ wspórzędnych np. tak, aby wektor wodzący :

$$\vec{r}(t)=[x_1(t), x_2(t), 0]$$

W takim układzie wektor $\vec{b}=\vec{e}_3$.

Ruch odbywa się po prostej jeśli dla dowolnych chwil czasu t_1, t_2 :

$$P_{\vec{b}}(\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1))=\vec{r}(t_2)-\vec{r}(t_1)$$

gdzie $\vec{b}=\vec{const}$ jest wektorem o kierunku zgodnym z kierunkiem prostej po której odbywa się ruch. W szczególności dla dowolnej chwili czasu :

$$P_{\vec{b}}(\vec{r}(t)-\vec{r}(0))=\vec{r}(t)-\vec{r}(0)$$

Różniczkując otrzymujemy warunek dla wektora prędkości :

$$P_{\vec{b}}(\vec{v}(t))=\vec{v}(t)$$

Ponownie różniczkując otrzymujemy warunek dla wektora przyspieszenia :

$$P_{\vec{b}}(\vec{a}(t))=\vec{a}(t)$$

Zauważmy, że dla ruchu po prostej możemy wybrać $\vec{b}=\vec{v}(t)$. Stąd jest :

$P_{\vec{v(t)}}(\vec{a}(t))=\vec{a}(t)=\vec{a}_N(t)+\vec{a}_S(t)$ i jednocześnie z definicji przyspieszenia stycznego $P_{\vec{v(t)}}(\vec{a}(t))=\vec{a}_S(t)$ czyli $\vec{a}_N(t)=\vec{0}$. Dla ruchu prostoliniowego nie ma przyspieszenia normalnego.
Dla takiego ruchu można wybrać układ wspórzędnych np. tak, aby wektor wodzący :

$$\vec{r}(t)=[x_1(t), 0, 0]$$

W takim układzie wektor $\vec{b}=\vec{e}_1$.

Konstruowanie trajektorii płaskiej i prostoliniowej.
Jeżeli mamy dowolną trajektorię $\vec{r}(t)$ to możemy zdefiniować $\vec{r}_*(t)\equiv\pi_{\vec{b}}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))$. Zatem jest $\vec{r}_*(t_0)=\vec{0}$ i oczywiście $\pi_{\vec{b}}(\vec{r}_*(t)-\vec{r}_*(t_0))=\vec{r}_*(t)-\vec{r}_*(t_0)$. O ile nie jest to ruch prostoliniowy czyli $P_{\vec{v}_*(t)}(\vec{r}_*(t)-\vec{r}_*(t_0))\neq\vec{r}_*(t)-\vec{r}_*(t_0)$ to otrzymujemy ruch stricte dwuwymiarowy (zakładamy , że definicja jest nietrywialna $\vec{r}_*(t)\neq\vec{0}$).
Postępując analogicznie możemy z dowolnej trajektorii $\vec{r}(t)$ otrzymać trajektorię prostoliniową definiując $\vec{r}_\#(t)\equiv P_{\vec{b}}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))$. Jest $\vec{r}_\#(t_0)=\vec{0}$ i znów $P_{\vec{b}}(\vec{r}_\#(t)-\vec{r}_\#(t_0))=\vec{r}_\#(t)-\vec{r}_\#(t_0)$ .Tym razem $P_{\vec{v}_\#(t)}(\vec{r}_\#(t)-\vec{r}_\#(t_0))=\vec{r}_\#(t)-\vec{r}_\#(t_0)$. Ruch jest jednowymiarowy (zakładamy , że definicja jest nietrywialna $\vec{r}_\#(t)\neq\vec{0}$).

Przekształcanie trajektorii.
Posługując się izometriami euklidesowej osi czasu T z dowolnej trajektorii $\vec{r}(t)$ otrzymujemy np. trajektorie $\vec{r}(-t)$, $\vec{r}(-t+2t_0)$, $\vec{r}(-t+t_A+t_B)$ dla których punkt materialny przemieszcza się w tym samym zbiorze położeń, ale z odwrotną chronologią. Trajektoria przesunięta w czasie to $\vec{r}(t-t_0)$.