Dynamika. Nauka o Siłach.

Na podstawie pojęć kinematyki, takich jak położenie , prędkość i przyspieszenie, sformułowana jest dynamika , która posługuje się pojęciem wektora siły, działającego na masywny punkt materialny. Rezultatem owej syntezy pojęć jest Równanie Newtona o fundamentalnym znaczeniu dla poznania praw przyrody. Abstrakcyjny język Równania Newtona to język rachunku różniczkowego i całkowego, który wyraża matematyczną naturę praw przyrody. Rozwiązaniem Równania Newtona jest trajektoria masywnego punktu materialnego w fizycznej przestrzeni euklidesowej. Trajektoria ta jest jedyną , która reprezentuje rzeczywistą ewolucję w czasie położenia masywnego punktu materialnego , wyróżnioną spośród wszystkich kinematycznie możliwych trajektorii.

Równanie Newtona

$$m\vec{a}(t)=\vec{F}(\vec{r}(t),\vec{v}(t),t)$$

Prawa strona równania to wektor siły $\vec{F}$, zależny w ogólności od czasu t , położenia $\vec{r}(t)$ i prędkości $\vec{v}(t)$ masywnego punktu materialnego.
Lewa strona równania to iloczyn masy punktu materialnego m i wektora przyspieszenia punktu materialnego $\vec{a}(t)$.
Należy podkreślić treść owego prawa przyrody. Działająca siła jest przyczyną powstania przyspieszenia. Przyspieszenie jest skutkiem działania siły. Skalarny współczynnik masy wyznacza proporcję między przyczyną a skutkiem tzn. $m=\frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$. Obie strony Równania Newtona a priori są różnymi obiektami , które wiąże ze sobą ta zasada dynamiki.
Podkreślmy różniczkowy charakter Równania Newtona :

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\vec{F}\left(\vec{r}(t),\frac{d\vec{r}(t)}{dt},t\right)$$

Jest to równanie różniczkowe rzędu drugiego. Jednoznaczne rozwiązania zależą od prędkości początkowej $\vec{v}(t_0)$ i położenia początkowego $\vec{r}(t_0)$. Teoria jest lokalna tzn. zachowanie punktu materialnego zależy tylko od bliskiego otoczenia punktu w danej chwili. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań , kluczowe dla fizyki , gwarantują odpowiednie twierdzenia.
We współrzędnych kartezjańskich Równanie Newtona ma trzy składowe równania skalarne, które tworzą odpowiedni układ równań :

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\ddot{y}=F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\ddot{z}=F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \end{cases}$$

W ogólności każdy przypadek wymaga osobnych rozważań.
Przyjrzyjmy się prostym przykładom Równania Newtona. Rozważymy przypadek : stałej siły , siły zależnej od czasu , siły oporu zależnej od prędkości , siły sprężystości.

Rozwiązanie Równania Newtona. Stała siła.

$\vec{F}=\vec{const}$.

$$m\ddot{\vec{r}}(t)=\vec{F}$$

Całkując obustronnie po czasie otrzymujemy :

$$m\int_{t_0}^{t}\ddot{\vec{r}}(t)\,dt=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\,dt$$

stąd jest :

$$m\vec{v}(t)\Big|_{t_0}^{t}=\vec{F}\int_{t_0}^{t}dt$$

i w rezultacie :

$$m\vec{v}(t)-m\vec{v}(t_0)=(t-t_0)\vec{F}$$

Po przekształceniu całkujemy ponownie po czasie :

$$\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)dt=\int_{t_0}^{t}(\frac{\vec{F}}{m}t-\frac{\vec{F}}{m}t_0+\vec{v}(t_0))dt$$

$$\vec{r}(t)\Big|_{t_0}^{t}=(\frac{\vec{F}}{2m}t^2-\frac{\vec{F}}{m}t_0t+\vec{v}(t_0)t)\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\vec{r}(t)=\frac{\vec{F}}{2m}(t-t_0)^2+\vec{v}(t_0)(t-t_0)+\vec{r}(t_0)$$

Ruch jest ruchem płaskim , gdy wektory $\vec{F}\neq\vec{0}$, $\vec{v}(t_0)\neq\vec{0}$ i oba wektory są niewspółliniowe $|\vec{F}||\vec{v}(t_0)|\neq|\vec{F}\circ\vec{v}(t_0)|$. Wtedy bowiem $\pi_{\vec{b}}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))=\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$ dla $\vec{b}=\vec{v}(t_0)\times\vec{F}$, który jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny ruchu. Można wykazać, że trajektorią w tym przypadku jest parabola.

Ruch jest prostoliniowy , gdy wektory $\vec{F}\neq\vec{0}$, $\vec{v}(t_0)\neq\vec{0}$ i oba wektory są współliniowe . Możemy wybrać wektor kierunku prostej ruchu jako $\vec{b}=\vec{v}(t_0)$ lub ekwiwalentnie $\vec{b}=\vec{F}$ i stwierdzić, że $P_{\vec{b}}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))=\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$.

Ruch bez prędkości początkowej $\vec{v}(t_0)=\vec{0}$ jest prostoliniowy w kierunku $\vec{b}=\vec{F}$. Wtedy $\vec{r}(t)=\frac{\vec{F}}{2m}(t-t_0)^2+\vec{r}(t_0)$. Ruch jest jednostajnie przyspieszony ze stałym przyspieszeniem $\vec{a}(t)=\frac{\vec{F}}{m}=\vec{const}$.

Ruch jest nieprzyspieszony, gdy $\vec{F}=\vec{0}$. Ruch odbywa się po linii prostej o kierunku $\vec{b}=\vec{v}(t_0)$: $\vec{r}(t)=\vec{v}(t_0)(t-t_0)+\vec{r}(t_0)$, co stwierdzamy przez $P_{\vec{b}}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))=\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$.

Dla $\vec{F}=\vec{0}$ i $\vec{v}(t_0)=\vec{0}$ otrzymuje się spoczynek w punkcie $\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.

Rozwiązanie Równania Newtona. Siła zależna od czasu.

$$\vec{F}=\vec{F}(t)$$

$$m\ddot{\vec{r}}(t)=\vec{F}(t)$$

Równanie można wycałkować obustronnie po czasie (efektywnie) :

$$m\int_{t_0}^{t}\ddot{\vec{r}}(t)dt=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt$$

Otrzymujemy :

$$m\vec{v}(t)-m\vec{v}(t_0)=\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt$$

Prędkość :

$$\vec{v}(t)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt+\vec{v}(t_0)$$

Całkując ponownie :

$$\vec{r}(t)=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt)dt+\vec{v}(t_0)(t-t_0)+\vec{r}(t_0)$$

Problem jest rozwiązany z dokładnością do efektywnego wyliczenia całek

$$\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt \quad , \quad \int_{t_0}^{t}(\int_{t_0}^{t}\vec{F}(t)dt)dt$$

Rozwiązanie Równania Newtona.Zagadnienie sił niezależnych.

$$\vec{F}(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z},t)=[F_x(x,\dot{x},t),F_y(y,\dot{y},t),F_z(z,\dot{z},t)]$$

Zagadnienie rozpada się na układ trzech niezależnych równań :

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x(x,\dot{x},t) \\ m\ddot{y}=F_y(y,\dot{y},t) \\ m\ddot{z}=F_z(z,\dot{z},t) \end{cases}$$

Przykład. Siła oporu proporcjonalna do prędkości.

$$\vec{F}(\vec{v})=-b\vec{v}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-b\dot{x} \\ m\ddot{y}=-b\dot{y} \\ m\ddot{z}=-b\dot{z} \end{cases}$$

Można łatwo sprawdzić, że wektor prędkości :

$$\vec{v}(t)=[\dot{x}(t_0)e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)},\dot{y}(t_0)e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)},\dot{z}(t_0)e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}]$$

$\vec{v}(t_0)=[\dot{x}(t_0),\dot{y}(t_0),\dot{z}(t_0)]$ czyli $\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)}$

a wektor wodzący :

$$\vec{r}(t)=[\frac{m\dot{x}(t_0)}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)})+x(t_0),\frac{m\dot{y}(t_0)}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)})+y(t_0),\frac{m\dot{z}(t_0)}{b}(1-e^{-\frac{b}{m}(t-t_0)})+z(t_0)]$$

$$\vec{r}(t_0)=[x(t_0),y(t_0),z(t_0)]$$

Dla tego ruchu prawdziwa jest zależność :

$$\vec{r}(t)=\frac{m}{b}(\vec{v}(t_0)-\vec{v}(t))+\vec{r}(t_0)$$

Ruch jest jednowymiarowy , ponieważ $P_{\vec{b}}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))=\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$ dla $\vec{b}=\vec{v}(t_0)$.

Przykład . Siła sprężystości.

$$\vec{F}(\vec{r})=-k\vec{r}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-kx \\ m\ddot{y}=-ky \\ m\ddot{z}=-kz \end{cases}$$

Można sprawdzić, że wektor wodzący :

$$\vec{r}(t)=[A_x\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)+\varphi_x),A_y\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)+\varphi_y),A_z\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)+\varphi_z)]$$

a wektor prędkości :

$$\vec{v}(t)=[-A_x\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)+\varphi_x),-A_y\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)+\varphi_y),-A_z\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0)+\varphi_z)]$$

Amplitudy i fazy możemy wyrazić przez warunki początkowe $\vec{r}(t_0)$, $\vec{v}(t_0)$ rozwiązując układ równań :

$$\begin{cases} \vec{r}(t_0)=[A_x \sin\varphi_x, A_y \sin\varphi_y, A_z \sin\varphi_z] \\ \vec{v}(t_0)=[-\sqrt{\frac{k}{m}} A_x \cos\varphi_x, -\sqrt{\frac{k}{m}} A_y \cos\varphi_y, -\sqrt{\frac{k}{m}} A_z \cos\varphi_z] \end{cases}$$

Ruch może być conajwyżej płaski . Stwierdzić to można przez obliczenie wektora $\vec{b}=\vec{const}$ spełniającego zależność $(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))\times\vec{v}(t)=f(t)\vec{b}$. Z dokładnością do nieistotnego czynnika skalującego wektor $\vec{b}=[A_y A_z \sin(\varphi_y-\varphi_z), A_z A_x \sin(\varphi_z-\varphi_x), A_x A_y \sin(\varphi_x-\varphi_y)]$. Zatem jeśli ten wektor $\vec{b}\neq\vec{0}$ to ruch odbywa się w płaszczyznie prostopadłej do $\vec{b}=\vec{const}$ czyli spełniony jest warunek $\pi_{\vec{b}}(\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0))=\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)$.
Z kolei ruch zerowymiarowy czyli spoczynek w położeniu równowagi otrzymamy przy $\vec{v}(t_0)=\vec{0}$ i $\vec{r}(t_0)=\vec{0}$ co jest równoważne z zerowaniem się amlitud $A_x=A_y=A_z=0$.
W pozostałych przypadkach trajektoria jest jednowymiarowa tzn. wtedy i tylko wtedy , gdy $\vec{b}=\vec{0}$ i $[A_x, A_y, A_z]\neq\vec{0}$.

Przytaczamy poniżej siły oddziaływań fundamentalnych . Oddziaływania te opisuje pojęcie pola grawitacyjnego , elektrostatycznego , elektromagnetycznego.

Grawitacja Newtona.

$$\vec{F}_N=-\frac{GMm}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

Wektor siły grawitacji opisuje siłę przyciągania z jaką masa M umieszczona w początku układu współrzędnych przyciąga masę m umieszczoną w punkcie $\vec{r}=[x, y, z]$.

Siła Coulomba.

$$\vec{F}_C=\frac{kQq}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

Wektor siły elektrostatycznej opisuje siłę przyciągania / odpychania z jaką ładunek elektryczny Q umieszczony w początku układu współrzędnych przyciąga / odpycha ładunek elektryczny q umieszczony w punkcie $\vec{r}=[x, y, z]$. Oczywiście jest $Qq>0$ (odpychanie) albo $Qq<0$ (przyciąganie).

Siła Lorentza.

$$\vec{F}_L=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$

Wektor siły Lorentza opisuje siłę jaka działa na punktowy ładunek elektryczny q w polu elektrycznym $\vec{E}=\vec{E}(x, y, z, t)$ i magnetycznym $\vec{B}=\vec{B}(x, y, z, t)$. Wektor $\vec{v}$ jest prędkością cząstki naładowanej.

Pojęcie pola sił prowadzi w konsekwencji do geometrycznego rozszerzenia fizycznej euklidesowej przestrzeni . Rozszerzeniem tym jest przestrzeń konfiguracyjna $C=X\times V$, której elementami są $[x, y, z, v_x, v_y, v_z]\in C$ .Elementy przestrzeni konfiguracyjnej nazywamy stanami cząstki. Stan cząstki tworzy położenie $\vec{r}\in X$ i prędkość $\vec{v}\in V$ traktowane jako zmienne niezależne.
Zatem pole sił jest funkcją stanu cząstki i czasu. Ważną konsekwencją takiego określenia siły jest to, że siły można do siebie dodawać (zasada superpozycji sił) .